

Някои изследвания върху геодезическите мрежи при използване на координатни/позиционни/ измервания

Гинчо Костов

Some studies on the Geodetic networks in the case of using coordinate/positional/ measurements

Gintcho Kostov

Abstract: A study on the geodetic networks is made in the case of including additional measurements as coordinates and its influence on the accuracy of geodetic determinations and the condition of normal equations. A variant with excluded datum, but with included measured coordinates is also object to study. Tests with real geodetic network are performed.

keywords: network, measurement, assessment, surveying, condition, accuracy, quality, adjustment, geodesy, geodetic, мрежа, измерване, оценка, изследване, обусловеност, точност, качество, изравнение, геодезия, геодезическа.

1. Увод:

С навлизане на съвременните методи на измерване в геодезическата практика се създава нова възможност за допълнително въвеждане на т. нар. измерени координати/координатни разлики/ към съществуващите класически измервания. Това предполага съвместната обработка на тези измервания, както и използването им в специфични случаи.

Цел на настоящия доклад е да се направи едно изследване върху това какво влияние оказват върху точността на ново определяемите точки и на обусловеността на нормалната система добавянето на измерени координати към класически измервания.

2. Теоретична формулировка

Трябва да се отбележи, че са възможни два случая на изравнение, в зависимост от типа на величините/корелирани или некорелирани/.

Строго погледнато, изравнението ще протече по стандартния принцип, с разлика, че матрицата на тежестите P , както и матрицата на обратните тежести Q в случай, че разглеждаме зависими величини няма да бъдат диагонални [Атанасов, 1988].

Ако въвеждаме данни, получени в резултат на предишно изравнение и те се добавят към измерените величини, би следвало те да се разглеждат като зависими, с матрицата им на корелация.

Тук ще разгледаме случая на некорелирани величини. Данните, с които се разполага са получени чрез преки измервания.

В случая уравненията на поправките за измерена координата ще бъдат:

$$(2.1) V_x = 1.dx + 0.dy + f_x; V_y = 0.dx + 1.dy + f_y$$

$$(2.2) f_x = X^0 - X^{изм.}; f_y = Y^0 - Y^{изм.}$$

След получаването на числения вид на съответното уравнение за измерени координати, то участва при формирането на нормалната система.

Всички останали величини се изчисляват по стандартните начини, като компютъра проверява дали има наличие на измерени координати, за да изчисли съответните за тях поправки.

Използвани са следните критерии за оценка на точността на мрежата и обусловеността на нормалната система:

$$(2.3) \text{ Средна квадратна грешка за измерване с тежест единица: } \mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$$

(2.4) Средни квадратни грешки по съответните оси и в положението на новоопределяемите

$$\text{точки: } M_{x_i} = \mu \sqrt{Q_{i,i}} ; M_{y_i} = \mu \sqrt{Q_{i+1,i+1}} ; M_{p_i} = \sqrt{M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2}$$

$$(2.5) \text{ Средна аритметична грешка за цялата мрежа: } M_{ar} = \frac{\sum_{i=1}^{nn} M_{p_i}}{nn}$$

$$(2.6) \text{ Средна квадратна грешка за цялата мрежа: } M_{sq} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nn} M_{p_i}^2}{nn}}$$

$$(2.7) \text{ Следа на тежестната матрица: } Sp(Q) = \sum_{i=1}^u Q(i,i)$$

$$(2.8) \text{ Полуос на елипсата/елипсоида на грешките: } a_i = \mu \sqrt{\lambda_i}$$

$$(2.9) \text{ Детерминанта на тежестната матрица } Det(Q) = \prod_{i=1}^u \lambda_i$$

Въвеждаме означенията, използвани в [Константинов, 1997]:

$$(2.10) \varepsilon cond(N) ; \varepsilon = 2.2204E-16 \text{ и } cond(N) = \|N\| \|Q\| ,$$

където $\|N\|$ и $\|Q\|$ са съответно нормите на нормалната и обратната ѝ матрици. Числото $cond(N)$ наричаме число на обусловеност. За $\varepsilon cond(N) \ll 1$ следва, че изследваната матрица е добре обусловена.

В литературата [Фадеев, 1963] са дефинирани следните критерии:

$$(2.11) N = \frac{1}{u} N(A)N(A^{-1}) - N \text{ число ; } M = \frac{1}{u} M(A)M(A^{-1}) - M \text{ число}$$

$$(2.12) N(A) = \sqrt{Sp(A^T A)}$$

$$(2.13) M(A) = u \cdot \max_{ij} |a_{ij}| - \text{число на Тод}$$

u и обозначаваме дименсията на матрицата, с a_{ij} - нейните елементи.

$$(2.14) P = \frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)} - P\text{-число}$$

Както е известно от [Вълев, 1989] P-числото е в обратна зависимост с обусловеността на нормалната система.

$$(2.15) H = \sqrt{\frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)}} - H\text{-число}$$

3. Практически аспекти

В средата на Microsoft Windows XP/98 авторът е програмирал алгоритъм за изчисление на изброените по-горе критерии с цел изследване на геодезическите мрежи. За разработката е използвана част от реална мрежа, в която основните измервания са ъглови.

За да се установи влиянието на добавените данни във вид на измерени координати подхождаме по следния начин.

За дадената мрежа се избират конкретни точки, от които изкуствено се премахват определящите елементи/визури/, като броя им се свежда до минимум.

Възможен е и друг подход – разглеждаме мрежата без дадени точки, като тогава се добавят в данните определен брой измерени координати, с които да се започне изчислението

на останалите точки в мрежата. След пресмятането на приблизителните координати на всички точки извършваме изравнението, като не се вземат предвид никакви дадени точки.

Направени са няколко експеримента. Последователно изследваме две точки, разположени в средата и края на мрежата (N 118 и N 128).

Вариантите, предмет на изследването са:

1. Мрежа с две дадени точки – пълен брой измервания
2. Мрежа без дадени точки, с две измерени координати – пълен брой измервания
3. Мрежа с две дадени точки – за т. 118/разположена в средата на мрежата/ изкуствено намален броя на определящите елементи, с добавени измерени координати за същата.
4. Мрежа без дадени точки – за т. 118 изкуствено намален броя на определящите елементи, с добавени измерени координати за две точки.
5. Мрежа с две дадени точки – за т. 128/максимално отдалечена от дадените точки/ изкуствено намален броя на определящите елементи, с добавени измерени координати за същата.

6. Мрежа без дадени точки – за т. 128 изкуствено намален броя на определящите елементи, с добавени измерени координати за две точки.

7. Мрежа с дадени точки в краищата на мрежата

8. Мрежа с измерени координати в краищата на мрежата без дадени точки

Крайните резултати от изчисленията за споменатите критерии са дадени в табл. 1 и табл. 2.

4. Резултати и изводи

Необходимо е да се отбележи, че изравнението на всеки един от вариантите на геодезическата мрежа е направено в три итерации. В таблицата е посочена само последната от тях. Между първата и последната изчислителни процедури се наблюдават известни различия в изчислените критерии при вариантите с включване на дадени точки, следствие на натрупаните грешки при изчислението на приблизителните координати.

При данните с редуцирани измервания и наличие на дадени точки между първата и последната итерации се наблюдава намаление на стойността на средната квадратна грешка за единица тежест. Подобряват се неколкостранно: средните квадратни грешки на точките, елипсите на грешките, като точките с измерени координати имат забележимо много по-добри критерии за точност. Подобри са и оценките за цялата мрежа. Числата на Год и Тюринг, обусловеността на нормалната система и следата на тежестната матрица не се променят забележимо.

При обработката на редуцирани измервания без дадени точки наблюдаваме рязко повишение на точността в определянето на точките с измерени координати, намаление на полуосите на елипсите на грешките в сравнение с останалите точки, на които няма допълнителни измервания. Следата на тежестната матрица, обусловеността на нормалната система, оценките за цялата мрежа, както и полуосите на елипсите на грешките между отделните итерации, числата на Год и Тюринг се запазват.

При вариант с оригинални данни между итерациите се наблюдава намаление на средната квадратна грешка за единица тежест, на оценките за всяка една точка и средните грешки за цялата мрежа. Числата на Год и Тюринг се запазват в същия диапазон. Относително без промяна остава и числото на обусловеност на нормалната система.

Резултатите при изравнението на мрежата с дадени точки, разположени по краищата, при първата итерация дават доста песимистични оценки за средната квадратна грешка за единица тежест/намалена почти десетократно между отделните итерации/ и за грешките в положението на точките. В случай, че същите точки се въведат с техните измерени координати, без да приемаме дадени точки, не се наблюдава разлика между съответните итерации, като точките с допълнителни измервания при всички случаи се получават с подобрени критерии за точност.

На база на съответните изчислени оценки за точност в положението на точките и за обусловеност на нормалната система установяваме, че:

При наличие на измерени координати се наблюдава рязко подобрене в точността на определяне на точките, за които има въведени допълнителни измервания. Не се наблюдават съществени промени в обусловеността на нормалната система.

От направените изчисления може да се заключи, че въвеждането на координатни измервания към класическите може значително да подобри определянето на точките от геодезическата мрежа.

Табл.1

вариант/параметри	премахнати опр. ел. за т.		премахнати опр. ел. за т.	
	118		128	
Дименсии [mm]				
брой Нови точки	34	36	34	36
брой Дадени точки	2	0	2	0
брой ъглови станции	29	29	29	29
бр. точки с измерени координати	1	2	1	2
Средна кв. грешка за тежест единица	5.9	6.0	5.9	6.0
[Pff.U]	1982.8	1981.6	2113.6	2113.6
[pvv]	1982.8	1981.6	2113.6	2113.6
Trace(Q)	6921.8	12783.1	7916.6	91584.9
Delta (Q)	2.68E+70	1.39E+77	2.14E+68	6.38E+75
Mx	5.9	6.0	5.9	6.0
My	5.9	6.0	5.9	6.0
Mp	8.3	8.5	8.4	8.5
Изследвани точки	оценки за т. 118		оценки за т. 128	
Средна кв. грешка за цялата мрежа	84.2	113.1	90.6	304.5
Средна ар. грешка за цялата мрежа	77.1	103.4	85.5	273.9
Елипса на грешките - голяма полуос	5.9	6.0	5.9	6.0
Елипса на грешките - малка полуос	5.9	6.0	5.9	6.0
Min/Max полоси- Хипер Елипсоид	4.96/309.88	4.5/460.2	5.7/350.0	5.3/1656.4
Min/Max полуоси - елипса на грешките	5.9/133.3	6/168.3	5.9/127.1	6/468.6
M чилсо на Тюринг	41767.7	68869.5	29960.0	515097.1
N чилсо на Тюринг	26.6	52.4	33.0	592.6
Число на Год	89.5	102.4	71.1	89.2
P-число	3895.5	10211.8	3660.0	96941.7
H-число	62.4	101.1	60.5	311.4
eps*cond(N)	2.62E-12	6.26E-12	3.19E-12	6.74E-11

вариант/параметри	оригинална мрежа		Дадени точки в краищата	Измерени точки в краищата
Дименсии [mm]				
брой Нови точки	34	36	29	36
брой Дадени точки	2	0	7	0
брой ъглови станции	29	29	29	29
бр. точки с измерени координати	0	2	0	7
Средна кв. грешка за тежест единица	6.0	6.0	25.94	24.1539
[Pff.U]	2113.6	2113.6	45788.3	39672.09
[pvv]	2113.6	2113.6	45788.31	39672.09
Trace(Q)	26179.9	26640.7	2144.666	2315.3744
Delta (Q)	1.81E+74	1.81E+74	1.03E+57	1.98E+61
Mx	88.4/168.7	89.3/170.1	361.23	347.16
My	87.9/200.2	88.8/ 201.4	310.53	295.01
Mp	124.7/261.8	125.9/ 263.6	476.36	455.57
Изследвани точки	оценки за т. 118 и 128	оценки за т. 118 и т. 128	оценки за т. 2833	оценки за т. 2833
Средна кв. грешка за цялата мрежа	167.5	164.2	223.15	193.71
Средна ар. грешка за цялата мрежа	159.2	152.2	204.01	167.89
Елипса на грешките - голяма полуос	95.8/204.8	96.6/205.9	361.68	348.3
Елипса на грешките - малка полуос	79.8/ 163.0	80.8/164.4	310	293.66
Min/Max полуоси- Хипер Елипсоид на грешките	6.0/675.6	5.87/681.57	26.12/591.42	24.17/ 579.26
Min/Max полуоси - елипса на грешките	46.2/211.6	6/212.8	47.5/361.7	31/348.3
M чилсо на Тюринг	39590.6	88845.4	5609.16	11064.02
N чилсо на Тюринг	131.4	126.6	4.65	5.98
Число на Год	33.9	75.2	28.95	53.56
P-число	12418.6	13464.3	512.864	574.6081
H-число	111.4	116.0	22.6465	23.971
eps*cond(N)	1.14E-11	1.41E-11	4.76E-13	6.74E-13

Табл.2

Литература

- Атанасов, Ст., Теория на математическата обработка на геодезическите измервания. Техника. София, 1988
- Вълев, Г., Господинов, Сл., Оптималност и обусловеност при геодинамичните геодезически мрежи, Юбилейна научна сесия НИИГиК, 1989
- Константинов, М., Вълчанов, Н., Съвременни математически методи за компютърни пресмятания част 2 - Числена линейна алгебра. Студии на БИАП - Математически науки. София 1997
- Фаддеев, Д.К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва 1963